FACULTY OF SCIENCE

B.Sc., IV-Semester (Regular/Backlog) Examinations, May - 2019

Mathematics

Algebra

Time : 3 Hours **Max. Marks: 80**

Note: Answer any **FIVE** question in Section-A and **All** questions in Section-B.
గమనిక: **భాగం-ఎ** లో ఏవైనా **ఐదు** ప్రశ్నలకు మరియు **భాగం-బి** లో అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయండి.

Section (భాగం)-A (Short Type Answers) **5x4=20 M**

1. In a group G show that the identify element and inverse of an element is unique.
ఒక సమూహము Gలో తత్సమ మూలకము, విలోమము ఏకైకమని చూపండి.

2. Show that every cyclic group is abelian. Is the converse true? Justify your answer.
ప్రతి చక్రీయ సమూహము ఎబిలియన్ సమూహమని చూపండి. విపర్యము నిజమా? మీ సమాధానము సమర్థించండి.

3. Define group isomorphism. If ϕ is isomorphism from a group G onto a group $\bar{G}$ then show G is abelian if and only if $\bar{G}$ is abelian.
సమూహాల తుల్యరూపతను (isomorphism) నిర్వచించండి. ϕ అనేది G సమూహము నుండి, సమూహము $\bar{G}$ కు తుల్యరూపత అయితే G ఎబిలియన్ $\Leftrightarrow$ $\bar{G}$ ఎబిలియన్ అని చూపండి.

4. Define Coset of H in G. Show that for any a, b in G $aH = bH$ if and only if $a^{-1}\, b\, \in H$.
G లో H యొక్క సహసమితిని నిర్వచించండి. ఏవేని a, b∈ G కి $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}\, b\ \ H$ అని చూపండి.

5. In a ring R for $a, b\ \in R$ show that
$(i)\ a\,(0) = 0\,(a) = 0 \quad (ii)\ \ a\,(-b) = (-a)\,b = -ab \quad (iii)\,(-a)\,(-b) = ab$
$a, b\ \in R$ వలయంలో $(i)\ a\,(0) = 0\,(a) = 0 \quad (ii)\ \ a\,(-b) = (-a)\,b = -ab \quad (iii)\,(-a)\,(-b) = ab$ అని చూపండి.

6. If $a\ \in R$ and $S = \{\, x\ \in R\ : ax = 0\}$ then show that S is subring of R.
$a\ \in R$ మరియు $S = \{\, x\ \in R\ : ax = 0\}$ అయితే S R కు ఉపవలయమని చూపండి.

7. If $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 2,\ \ g(x) = 2x^2 + 2x + 1$ then find $(i)\ f(x) + g\,(x)$ and $(ii) f(x).g(x)$ in $Z_3[x]$
$f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 2,\ \ g(x) = 2x^2 + 2x + 1$ అయితే $Z_3[x]$ లో $(i)\ f(x) + g\,(x)$ and $(ii) f(x).g(x)$ కనుక్కోండి.

8. Let $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in z\right\}$ and $\emptyset$ be the mapping that takes $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ to $(a - b)$ then show that $\emptyset$ is homomorphism.
$R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in z\right\}$ మరియు $\emptyset\ :\ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \to (a - b)$ అయితే $\emptyset$ ఒక సమరూపత అని చూపండి.

Section (భాగం)-B (Essay Type Answers) **4x15=60 M**

9. a) Show that every group of prime order is cyclic.
ప్రధాన సంఖ్య తరగతిగాగల ప్రతి సమూహము చక్రీయమని చూపండి.

OR (లేదా)

b) Show that every subgroup of cyclic group is cyclic.
చక్రీయ సమూహము ప్రతి ఉపసమూహము చక్రీయమని చూపండి.

P.T.O

10. a) State and prove Lagrange's theorem on groups.
సమూహాలపై లగ్రాంజ్ సిద్ధాంతం ప్రవచించి నిరూపించండి.

OR (లేదా)

b) Define centre $Z(G)$ of a group G and show that it is subgroup of G.
సమూహపు కేంద్రం $Z(G)$ ను నిర్వచించండి మరియు అది సమూహము Gకు ఉపసమూహమని చూపండి.

11. a) Show that a finite integral domain is a field.
పరిమితి పూర్ణాంక ప్రదేశము ఒక క్షేత్రమని చూపండి.

OR (లేదా)

b) Define characteristic of a ring and show that the characteristic of an integral domain is either zer or prime.

వలయ లాక్షణికంను నిర్వచించి ఒక పూర్ణాంక ప్రదేశపు లాక్షణికం ప్రధాన సంఖ్యగాని లేక సున్నగాని అవుతుందని చూపండి.

12. a) Define homomorphism of ring Let R be a ring with unity e. Then sow that the mapping $\phi : Z \to R$ defined by $\phi(n) = n\,e$ is ring homomorphism.
వలయాల సమరూపత నిర్వచించండి. R తత్సమ మూలకం e గల వలయం అయితే $\phi : Z \to R$ చే నిర్వచితమైన ప్రమేయము $\phi(n) = n\,e$ ఒక వలయ సమరూపత అని చూపండి.

OR (లేదా)

$a = bq + r$

b) State and prove division algorithm.
~~భాగహార విశేషవిధిని ప్రవచించి నిరూపించండి.~~

$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$

ജ❖ന്ദ

Code: 828/ET/R

FACULTY OF SCIENCE

B.Sc., IV-Semester (Regular) Examinations, December-2020

MATHEMATICS-4

(Algebra)

Time: 2 Hours **Max. Marks: 80**

Note: Answer any **Four** of the following questions. **4x20=80M**

గమనిక: ఈ క్రింది వాటిలో ఏవేని **నాలుగు** ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయుము.

1. A non empty set H of G is subgroup of G if an only if $ab^{-1} \in H \quad \forall a,b \in H$.
   H అనే శూన్యేతర సమితి G కు ఉపసమూహం కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం $ab^{-1} \in H \quad \forall a,b \in H$.

2. Show that every permutation of a finite set can be written as a cycle or as a product of disjoint cycles.
   ప్రతి ప్రస్తారాన్ని (పరిమిత సమితిపై) ఒక చక్రము లేదా వియుక్త చక్రాల లబ్ధంగా వ్రాయవచ్చు అని చూపండి.

3. Show that a subgroup H of a group G is normal subgroup of G if and only if the product of two right (left) cosets of H in G is a right (left) coset of H in G.
   సమూహము G లో ఒక ఉపసమూహము H, G కి ఒక అభిలంబ ఉపసమూహము కావటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము G లో H యొక్క ఒక కుడి (ఎడమ) సహసమితి అని చూపండి.

4. State and prove first isomorphism theorem of groups.
   సమూహాలకు మొదటి తుల్యరూపత సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించండి.

5. Prove that every field is an integral domain.
   ప్రతి క్షేత్రము ఒక పూర్ణాంక ప్రదేశం అని నిరూపించండి.

6. Let R be a commutative ring with unity and A be a ideal of R then R/A is an integral domain $\Leftrightarrow$ A is prime ideal.
   R అనేది తత్సమ సహిత వినిమయవలయం మరియు A అనేది R యొక్క ఆదర్శం అయితే R/A పూర్ణాంక ప్రదేశం $\Leftrightarrow$ A ప్రధాన ఆదర్శం.

7. Let $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \Big/ a,b \in \mathbb{Z} \right\}$. and let ϕ be the mapping that takes $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ to $a-b$.
   $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \Big/ a,b \in \mathbb{Z} \right\}$. మరియు ϕ అనే ప్రమేయం $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ నుండి $a-b$ గా నిర్వచితం అయితే
   i) Show that ϕ is a ring homomorphism
      ϕ అనేది వలయ సమరూపత అని చూపండి
   ii) Determine the kernel of ϕ
      ϕ యొక్క అంతస్థము నిర్ధారించండి
   iii) Show that $R/Ker\phi$ is isomorphic to $\mathbb{Z}$
      $R/Ker\phi$ అనేది $\mathbb{Z}$ తో తుల్య రూపం అని చూపండి.

8. If R is a ring, then show that the set $R[x]$ of all polynomials is a ring with respect to addition and multiplication of polynomials.
   R ఒక వలయము అయితే బహుపదుల సమితి $R[x]$ అనేది బహుపదుల సంకలనము మరియు గుణకారము దృష్ట్యా వలయము అవుతుందని చూపండి.

Code: 828/ET/BL

FACULTY OF SCIENCE

B.Sc., IV- Semester (Backlog) Examinations, Sept./Oct.-2020

Mathematics

(Algebra)

Time: 2 Hours **Max. Marks: 80**

Note: Answer any **Four** of the following questions. **4x20=80M**

గమనిక: ఈ క్రింది వాటిలో **నాలుగు** ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయుము.

1) If $G = < a >$ be a cyclic group of order n then show that $G = < a^k >$ if and only if $\gcd(k, n) = 1$.
$G = < a >$ అనేది తరగతి n గాగల చక్రీయ సమూహము అయితే $G = < a^k > \Leftrightarrow \gcd\ (k, n) = 1$ అని చూపండి.

2) Define Centre of a group G and show that the centre of a group G is subgroup of G.
ఒక సమూహము G యొక్క కేంద్రము నిర్వచించి, సమూహము G యొక్క కేంద్రము Gకి ఉప సమూహమని చూపండి.

3) State and prove Lagrange's Theorem on groups.
సమూహాలపై లెగ్రాంజి సిద్ధాంతం ప్రవచించి, నిరూపించండి.

4) Show that a sub group H of a group G is normal in G if and only if $aH = Ha$ for all $a \in G$.
H అనేది G సమూహముకు అభిలంబ ఉపసమూహము $\Longleftrightarrow$ $aH = Ha$ for all $a \in G$.

5) Define the characteristic of a ring. Show that the characteristic of an integral domain is either zero or prime.
వలయము యొక్క లాక్షణికతను నిర్వచించండి. పూర్ణాంక ప్రదేశము యొక్క లాక్షణికత సున్నగాని లేక ప్రధాన సంఖ్య అని చూపండి.

6) Let $Z[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Z\}$ prove that $Z[\sqrt{2}]$ is a ring under ordinary addition and multiplication of real numbers.
$Z[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Z\}$ అయితే $Z[\sqrt{2}]$ అనేది సాధారణ సంకలనము మరియు గుణకారము దృష్ట్యా ఒక వలయమని చూపండి.

7) State and prove that fundamental theorem of Homomorphism for Rings.
వలయాలకు సమరూపత మూల సిద్ధాంతం నిర్వచించి, నిరూపించండి.

8) State and prove Division Algorithm.
~~భాగహార విశేషవిధిని నిర్వచించి,~~ నిరూపించండి.

Code: 278/ET/BL

FACULTY OF SCIENCE

B.Sc., IV-Semester (Backlog) Examinations, July/August-2021

MATHEMATICS

Paper-IV

Algebra

Time: 2 Hours **Max. Marks: 80**

Note: Answer any **Four** of the following questions. **4x20=80M**

గమనిక: ఈ క్రింది వాటిలో ఏవేని **నాలుగు** ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయుము.

1. State and prove two step subgroup test.
రెండు మెట్ల ఉపసమూహ పరీక్షను నిర్వచించి, నిరూపించండి.

2. Let G be a group and $a \in G$. If order of a is n then show that $\langle a \rangle = \langle e, a, a^2, \ldots\ldots, a^{n-1} \rangle$ and $a^i = a^j \Leftrightarrow n/(i-j)$.
G ఒక సమూహాము మరియు $a \in G$ మూలకము a యొక్క తరగతి n అయితే $\langle a \rangle = \langle e, a, a^2, \ldots\ldots, a^{n-1} \rangle$ మరియు $a^i = a^j \Leftrightarrow n/(i-j)$ అని చూపండి.

3. State and prove Cayley's theorem.
కేయిలి సిద్ధాంతంను నిర్వచించి, నిరూపించండి.

4. Let ϕ be a homomorphism from a group G to a group $\overline{G}$ and let $a \in G$. Then prove that (i) $|\phi(a)| / |a|$ if $|a|$ is finite and (ii) $Ker\phi$ is a subgroup of G.
ϕ అనేది సమూహాము G నుండి $\overline{G}$ కు ఒక సమరూపత మరియు $a \in G$ అయితే (i) $|a|$ పరిమితం అయితే $|\phi(a)| / |a|$ మరియు (ii) $Ker\phi$ అనేది సమూహాము G యొక్క ఉపసమూహాము అని నిరూపించండి.

5. Show that the characteristic of an integral domain is either zero or prime.
ఒక పూర్ణాంక ప్రదేశము యొక్క లాక్షణికము సున్న లేదా ప్రధానసంఖ్య అని చూపండి.

6. If R is a commutative ring with unity and A is an ideal of R, then show that R/A is an integral domain iff A is a prime ideal of R.
తత్సమసహిత వినిమయ వలయం R లో A ఒక ఆదర్శము అయితే R/A అనేది పూర్ణాంక ప్రదేశం $\Leftrightarrow$ A అనేది అభాజ్య ఆదర్శము అని చూపండి.

7. Let ϕ be a ring homomorphism from a ring R to a ring S. Then show that ϕ is an isomorphism $\Leftrightarrow \phi$ is onto and $\ker\phi = \{0\}$.
ϕ అనేది వలయము R నుండి S కు ఒక వలయ సమరూపత అయితే ϕ ఒక తుల్యరూపత $\Leftrightarrow$ ϕ సంగ్రస్త ప్రమేయము మరియు $\ker\phi = \{0\}$ అని చూపండి.

8. State and prove division algorithm.
భాగహార విశేష విధిని ప్రవచించి, నిరూపించండి.

Code: 787/ET/R

FACULTY OF SCIENCE

B.Sc., IV-Semester (Regular) Examinations, July/August-2021

MATHEMATICS

Paper-IV

Algebra

Time: 2 Hours **Max. Marks: 80**

Note: Answer any **Four** of the following questions. **4x20=80M**

గమనిక: ఈ క్రింది వాటిలో ఏవేని **నాలుగు** ప్రశ్నలకు సమాధానాలు వ్రాయుము.

1. i) Let none empty set H of G is subgroup of G if and only if $ab^{-1}\in H\ \forall a,b\in H$.
   H అనే శూన్యేతర సమితి, సమూహం G కు ఉపసమూహం కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం $ab^{-1}\in H\ \forall a,b\in H$.

   ii) Show that the group $U(14)$ is cyclic.
   సమూహం $U(14)$ చక్రీయమని నిరూపించుము.

2. i) Let $G=\langle a\rangle$ and $|a|=24$ then find all the generators of G.
   $G=\langle a\rangle$ మరియు $|a|=24$ గా గైకొనుము. అప్పుడు G యొక్క అన్ని జనక మూలకాలను కనుగొనుము.

   ii) Let G be a group and $a\in G$. Then show that $\langle a\rangle=\langle a^{-1}\rangle$.
   G ఏదేని సమూహమని $a\in G$ గా గైకొనుము . ఇప్పుడు $\langle a\rangle=\langle a^{-1}\rangle$ అని నిరూపించుము.

3. State and prove Cayley's theorem.
   కెయిలీ సిద్ధాంతంను ప్రవచించి, నిరూపించుము.

4. Let H be a subgroup of G and let $a,b\in G$. Then show that
   i) $|aH|=|bH|$ and ii) $aH=bH \Leftrightarrow a^{-1}b\in H$.
   సమూహం G నకు H ఏదేని ఒక ఉపసమూహంగాను $a,b\in G$ గా గైకొనుము. అప్పుడు క్రింది వాటిని నిరూపించండి.
   i) $|aH|=|bH|$ and ii) $aH=bH \Leftrightarrow a^{-1}b\in H$.

5. i) Show that every subgroup of an abelian group is normal.
   వినిమయ సమూహం యొక్క ప్రతి ఉపసమూహం అభిలంబమవుతుందని నిరూపించుము.

   ii) Show that the group A_4 has no subgroup of order 6.
   సమూహం A_4 నకు 6 ను తరగతిగా కలిగిన ఉపసమూహం ఉండదని నిరూపించుము.

6. i) Define idempotent element in a ring R. Show that the only idempotent elements in an integral domain are 0 and 1.
   వలయం R లో ఇధంప్రభవ మూలకాన్ని నిర్వచించుము. 0 మరియు 1 లు మాత్రమే ఏదేని పూర్ణాంక ప్రదేశంలోని అపవర్తిత మూలకాలని నిరూపించుము.

   ii) Show that a field has no zero devisors.
   క్షేత్రంలో శూన్య భాజకాలుండవని నిరూపించుము.

7. Let R be a commutative ring and A be an ideal of R. Then show that $\frac{R}{A}$ is a field if and only if A is a maximal ideal of R.
   R ఒక వినిమయ వలయమని, మరియు A అనేది R నకు ఒక ఆదర్శమని అనుకొనుము.
   $\frac{R}{A}$ క్షేత్రం కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం A ఒక అధికతమ ఆదర్శం అని నిరూపించుము.

8. State and prove first isomorphism theorem for rights.
   వలయాలకు మొదటి తుల్య రూపత సిద్ధాంతంను నిర్వచించి, నిరూపించండి.

20033038468010

Code: 814/ET/R

FACULTY OF SCIENCE

B.Sc., IV-Semester (Regular) Examinations, July/August-2022

MATHEMATICS

Paper-IV

Algebra

Time: 3 hours **Max Marks: 80**

Section-A (Short Answer Questions)

8x4=32M

Note: Answer any **Eight** of the following questions in not exceeding 20 lines each.
సూచన: క్రింది వానిలో ఏవేని **ఎనిమిది** ప్రశ్నలకు ఒక్కోదానికి 20 పంక్తులకు మించని జవాబు వ్రాయుము.

1. Show that a group G is abelian if and only if $(ab)^2 = a^2b^2$ for all $a,b \in G$.
ఏదేని సమూహం G వినిమయం కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం $(ab)^2 = a^2b^2$ (ప్రతి $a,b \in G$ కి) అని చూపండి.

2. Let G be an abelian group and H,K are subgroups of G. Then show that $HK = \{hk/h \in H, k \in K\}$, is a subgroup of G.
ఒక వినిమయ సమూహం G లో H,K లు రెండు ఉపసమూహాలనుకోండి. ఇపుడు $HK = \{hk/h \in H, k \in K\}$, G నకు ఉపసమూహం అని నిరూపించండి.

3. Let G be a group and $a \in G$ is such that $|a| = 30$ then evaluate $|a^{13}|$, $|a^{15}|$.
ఏదేని సమూహం G లో $|a| = 30$ అయ్యే విధంగా $a \in G$ ఒక మూలకం అయినపుడు $|a^{13}|$, $|a^{15}|$ లను గణించుము.

4. For $n > 1$, show that A_n has order $\frac{n!}{2}$.
$n > 1$, అయినపుడు A_n యొక్క తరగతి $\frac{n!}{2}$ అనిచూపండి.

5. Let $\phi : G \to \overline{G}$ be a group isomorphism. Then show that $\phi(e) = \overline{e}$ where e, $\overline{e}$ are identifies of G and $\overline{G}$ respectively.
$\phi : G \to \overline{G}$ ఒక సమూహాల తుల్యరూపత అని, e, $\overline{e}$ లు వరుసగా G, $\overline{G}$ లలో తత్సమాలని అనుగొనుము. ఇపుడు $\phi(e) = \overline{e}$ అని చూపండి.

6. Let $G = S_3$ and $H = \{(1),\ (1\ 3)\}$ then find all left cosets of H in G.
$G = S_3$ మరియు $H = \{(1),\ (1\ 3)\}$ అయినపుడు G లో H యొక్క అన్ని ఎడమ సహసమితులను కనుగొనుము.

7. Show that every subgroup of an abelian group is always a normal subgroup.
వినిమయ సమూహం యొక్క ప్రతి ఉపసమూహం అభిలంబ ఉపసమూహం అవుతుందని నిరూపించండి.

8. Define subring of a ring and give an example.
ఒక వలయం యొక్క ఉపవలయాన్ని నిర్వచించి, ఒక ఉదాహరణ ఇవ్వండి.

9. Show that the ring $M_2(\mathbb{Z})$ of 2×2 matrices over the integers is not an integral domain.
పూర్ణ సంఖ్యలు మూలకాలుగా కలిగిన 2×2 మాత్రికల వలయం $M_2(\mathbb{Z})$ పూర్ణాంక ప్రదేశం కాదని నిరూపించుము.

10. Let R be a commutative ring with unity and $a \in R$. Then show that $aR = \{ar / r \in R\}$ is an ideal in R.
తుల్యత కలిగిన వినిమయ వలయం R లో $a \in R$ గా తీసుకోబడినది అయితే $aR = \{ar / r \in R\}$, R నకు ఒక ఆదర్శం అవుతుందని నిరూపించుము.

11. Find all maximal ideals in the ring $(\mathbb{Z}_{10}, +_{10}, \times_{10})$.
$(\mathbb{Z}_{10}, +_{10}, \times_{10})$ వలయంలో అన్ని గరిష్ఠ ఆదర్శాలను కనుగొనుము.

12. Determine all ring homomorphisms from $\mathbb{Z}_8$ to $\mathbb{Z}_{10}$.
$\mathbb{Z}_8$ నుండి $\mathbb{Z}_{10}$ కి గల వలయ సమరూపతలను నిర్ధారించండి.

Section-B (Essay Answer Questions) 4x12=48M

Note: Answer the following questions in not exceeding 4 pages each.
గమనిక: క్రింది ప్రశ్నలకు ఒక్కొక్క దానికి 4 పేజీలకు మించని జవాబు వ్రాయుము.

13. a) In a group G show that $ac = bc \Rightarrow a = b$ where $a, b, c \in G$.
ఏదైన సమూహం G లో $a, b, c \in G$ అయినప్పుడు $ac = bc \Rightarrow a = b$ అని నిరూపించండి.

b) Let H be a non empty finite subset of a group G. If for $a, b \in H$, $ab \in H$ then show that H is a subgroup of G.
సమూహం G లో H ఒక శూన్యేతర పరిమిత ఉపసమితి అయి ప్రతి $a, b \in H$ లకు $ab \in H$ అయితే సమూహం G నకు H ఒక ఉపసమూహం అని నిరూపించండి.

OR(లేదా)

c) Show that every subgroup of a cyclic group is cyclic.
చక్రీయ సమూహం యొక్క ప్రతి ఉపసమూహం చక్రీయమవుతుందని నిరూపించండి.

14. a) For $n > 1$, show that every permutation in S_n can be written as a product of 2-cycles (transposition).
$n > 1$ అయినప్పుడు S_n లో ప్రతి ప్రస్తారాన్ని మార్పిడుల (2-చక్రాల) లబ్ధంగా రాయవచ్చని నిరూపించుము.

OR(లేదా)

b) State and prove Lagrange's theorem.
లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతం ప్రవచించి, నిరూపించుము.

15. a) Let G be a group and H is a subgroup of G. Then show that H is normal subgroup of G if $aH.bH = abH$ for all $a, b \in G$.
G ఒక సమూహం, H దానికి ఒక ఉపసమూహం అనుకొనుము. ప్రతి $a, b \in G$ కి $aH.bH = abH$ అయినట్లు G కి H ఒక అభిలంబ ఉపసమూహం అవుతుందని నిరూపించుము.

OR(లేదా)

b) Show that every finite integral domain is a field.
ప్రతి పరిమిత పూర్ణాంక ప్రదేశం క్షేత్రం అవుతుంది.

c) Find all zero divisors in the ring $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12}, \times_{12})$.
$(\mathbb{Z}_{12}, +_{12}, \times_{12})$ వలయంలో గల అన్ని శూన్య భాజకాలను కనుగొనుము.

Code: 814/E1/BL

FACULTY OF SCIENCE

B.Sc., IV-Semester (Backlog) Examinations, June-2022

MATHEMATICS

(2019 Batch)

Paper-IV

Algebra

Time: 3 hours **Max Marks: 80**

Section-A (Short Answer Questions) 8x4=32M

Note: Answer any **Eight** of the following questions in not exceeding 20 lines each.
సూచన: క్రింది వానిలో ఏవేని **ఎనిమిది** ప్రశ్నలకు ఒక్కోదానికి 20 పంక్తులకు మించని జవాబు వ్రాయుము.

1. Show that $GL(2, \mathbb{R})$ is group with respect to matrix multiplication.
మాత్రిక గుణకారం దృష్ట్యా $GL(2, \mathbb{R})$ సమూహం అని చూపండి.

2. Prove that a group G is abelian if and only if $(ab)^2 = a^2b^2 \ \forall a,b \in G$.
సమూహం G వినిమయం కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం ప్రతి $a,b \in G$ కి $(ab)^2 = a^2b^2$ అని నిరూపించుము.

3. Let G be a group and $a \in G$. Prove that $\langle a^{-1} \rangle = \langle a \rangle$.
G ఏదేని సమూహం అని, $a \in G$ గా తీసుకొనుము. అప్పుడు $\langle a^{-1} \rangle = \langle a \rangle$ అని నిరూపించుము.

4. If $\beta \in S_7$ and $\beta = (2\ 1\ 4\ 3\ 5\ 6\ 7)$ then find β.
$\beta \in S_7$ మరియు $\beta = (2\ 1\ 4\ 3\ 5\ 6\ 7)$ అయినపుడు β ను కనుగొనుము.
$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

5. Show that $U(10) \ncong U(12)$.
$U(10) \ncong U(12)$ అని నిరూపించుము.

6. If G is a group, prove that $Aut(G)$ is group.
G సమూహం అయితే $Aut(G)$ సమూహం అని చూపండి.

7. Prove that a factor group of an abelian group is abelian.
వినిమయ సమూహం యొక్క వ్యుత్పన్న సమూహం వినిమయం అని నిరూపించుము.

8. Show that every finite integral domain is a field.
ప్రతి పరిమిత పూర్ణాంక ప్రదేశము క్షేత్రమని నిరూపించుము.

9. Define Ring and Subring.
వలయం మరియు ఉపవలయంలను నిర్వచించండి.

10. Prove that the only ideals of a field F are (0) and F only.
ఏదేని క్షేత్రము F నకు (0) మరియు F లు మాత్రమే ఆదర్శాలని నిరూపించుము.

11. Determine all ring homomorphisms from $\mathbb{Z}$ to $\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z}$ నుంచి $\mathbb{Z}$ నకు గల వలయ సమరూపతలను నిర్ధారించుము.

12. Show that the ideal $\langle x^2+1\rangle$ is maximal ideal in the ring $\mathbb{R}[x]$.

వలయం $\mathbb{R}[x]$ లో $\langle x^2+1\rangle$ అనే ఆదర్శం అధికతమమని నిరూపించండి

Section-B (Essay Answer Questions)

Note: Answer the following questions in not exceeding 4 pages each. 4x12=48

సూచన: క్రింది ప్రశ్నలకు ఒక్కో దానికి 4 పేజీలకు మించని జవాబు వ్రాయుము.

13. a) Let G be a group and H is a non empty subset of G if and only if $ab^{-1}\in H$ whenever $a,b\in H$.

G ఏదేని ఒక సమూహమని, H, G నకు ఒక శూన్యేతర ఉపసమితి అని అనుగొనుము. సమూహం G నకు H ఉపసమూహం కావడానికి ప్రతి $a,b\in H$ నకు, $ab^{-1}\in H$ అనేది ఆవశ్యక పర్యాప్తమని నిరూపించుము.

OR(లేదా)

b) Let $G=\langle a\rangle$ be a cyclic group of order n. Then show that $G=\langle a^k\rangle$ if and only if $\gcd(k,n)=1$.

n ను తరగతిగా కలిగిన చక్రీయ సమూహం $G=\langle a\rangle$ గా తీసుకొనుము. $G=\langle a^k\rangle$ కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్తనియమం గ.సా.భా. $(k,n)=1$ అని నిరూపించండి.

14. a) Show that every permutation of a finite set can be written as a cycle or as a product of disjoint cycles.

పరిమిత సమూహం యొక్క ప్రతి ప్రస్తారాన్ని చక్రియ ప్రస్తారంగా లేదా విభిన్న చక్రియ ప్రస్తారాల లబ్ధంగా రాయవచ్చని నిరూపించండి.

OR(లేదా)

b) State and prove Legrange's theorem.

లెగ్రాంజి సిద్ధాంతంను నిర్వచించి నిరూపించండి.

15. a) i) Let G be a group and $Z(G)$ be t he center of G. If $\frac{G}{Z(G)}$ is cyclic than show that G is abelian.

G ఏదేని సమూహమని, $Z(G)$ ని సమూహం G యొక్క కేంద్రమని అనుకొనుము. $\frac{G}{Z(G)}$ చక్రీయం అయితే G వినిమయమని నిరూపించుము.

ii) Prove that A_n is a normal subgroup of the group S_n.

సమూహం S_n కు A_n ఒక అభిలంబ ఉపసమూహం అవుతుందని నిరూపించండి.

OR(లేదా)

b) State and prove the first isomorphism theorem of groups.

సమూహాలపై మొదటి తుల్యరూపత సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

16. a) Let R be a commutative ring with unity and A be an ideal of R. Then show that $\frac{R}{A}$ is an integral domain if and only if A is a prime ideal of R.

ఒక తత్సమ సహిత వినిమయ వలయము R నకు A ఒక ఆదర్శం అనుకొనుము. $\frac{R}{A}$ పూర్ణాంక ప్రదేశం కావడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమం A అనేది R నకు ఒక అభాజ్య ఆదర్శం అని నిరూపించుము.

OR(లేదా)

) i) Let $\phi : R \to S$ be a onto ring homomorphism. A, B are ideals of R and S. Than show that if R has unity 1, $S \neq \{0\}$. Then show that $\phi(1)$ is the unity of S.

$\phi : R \to S$ ను ఒక వలయ సంగ్రస్త సమరూపత అని A, B లు వరుసగా R మరియు S లకు ఆదర్శాలనుకొనుము. $S \neq \{0\}$ అవుతూ R లో తత్సమము 1 ఉన్నపుడు $\phi(1)$, S లో తత్సమమని నిరూపించుము.

ii) If A, B are any two ideals of a ring R then show that $A + B = \{x + y / x \in A, y \in B\}$ is an ideal of R.

వలయం R లో A, B లు ఏవేని రెండు ఆదర్శాలు అయినపుడు, $A + B = \{x + y / x \in A, y \in B\}$ వలయం R కు ఒక ఆదర్శం అవుతుందని నిరూపించండి.

ഇ❖ω

FACULTY OF SCIENCE
B.Sc., IV-Semester (Backlog) Examinations, June-2022
Mathematics
(2016, 2017 & 2018 Batches)
Paper-IV
Algebra

Time: 3 hours Max Marks: 80

Section-A (Short Answer Questions) 5x4=20M

Note: Answer any **Five** of the following questions in not exceeding 20 lines each.
సూచన: క్రింది వానిలో ఏవేని **ఐదు** ప్రశ్నలకు ఒక్కోదానికి 20 పంక్తులకు మించని జవాబు వ్రాయుము.

1. In a group G, if $a^2 = a$ for all $a \in G$ then prove that G is abelian.
సమూహము G లో ప్రతి $a^2 = a$ అయితే G ను వినిమయ సమూహము అని నిరూపించండి.

2. If $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ and $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ then find gf, fg, f^2 and g^2.
$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ మరియు $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ అయితే gf, fg, f^2 మరియు g^2 ను కనుగొనండి.

3. Define left and right cosets of a subgroup H in G.
G లో ఉపసమూహము H యొక్క ఎడమ మరియు కుడి సహసమితులను నిర్వచించండి.

4. Prove that a subgroup of an abelian group is a normal subgroup.
వినిమయ సమూహము యొక్క ఉపసమూహము అభిలంబ ఉపసమూహము అని నిరూపించండి.

5. Prove that $R = \left[\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} : a, b \in Z\right]$ is a subring of $M_2(Z)$.
$R = \left[\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} : a, b \in Z\right]$ ను $M_2(Z)$ యొక్క ఉపవలయము అని నిరూపించండి.

6. Let R/A be a quotient ring. Then probe that R/A has unity element if R has unity element and R/A is commutative if R is commutative.
వలయము R లో తత్సమము ఉంటే వ్యుత్పన్న వలయము R/A లో తత్సమము మరియు వలయము R వినిమయమైతే R/A వినిమయమని నిరూపించండి.

7. Let $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in Z\right\}$. Show that a mapping $\phi : R \to Z$ defined by $\phi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \ \forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$ is a ring homomorphism.
$R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in Z\right\}$ మరియు ప్రమేయము $\phi : R \to Z$ ను $\phi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \ \forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$ గా నిర్వచిస్తే దానిని వలయ సమరూపత అని చూపండి.

8. Find $(2+3x+x^2)(1+2x+5x^3)$ in $Z[x]$.
$Z[x]$ లో $(2+3x+x^2)(1+2x+5x^3)$ ను కనుగొనండి.

Section-B (Essay Answer Questions)

Note: Answer the following questions in not exceeding 4 pages each. 4x15=

సూచన: క్రింది ప్రశ్నలకు ఒక్కో దానికి 4 పేజీలకు మించని జవాబు వ్రాయుము.

9. a) If G is a group and $a,b,c \in G$, then prove that $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Also solve the equatio $a\,x\,b = c$.

సమూహము G లో a,b,c లు మూలకాలు అయితే $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ అని చూపండి మరియు $a\,x\,b = c$ సమీకరణాన్ని x కొరకు సాధించండి.

OR(లేదా)

b) Show that every subgroup of a cyclic group is cyclic.
ఒక చక్రీయ సమూహయు యొక్క ప్రతి ఉపసమామము చక్రీయమని చూపండి.

10. a) State and prove Cayley's theorem.
కెయిలీ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

OR(లేదా)

b) Prove that a subgroup H of a group G is a normal subgroup $\Leftrightarrow$ every left coset of H in G is a right coset of H in G.
సమూహము G లో ఒక ఉపసమూహము H అభిలంబ ఉపసమూహము కావటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము G లో H యొక్క ప్రతి ఎడమ సహసమితి ఒక కుడి సహసమితి అని నిరూపించండి.

11. a) Prove that a finite integral domain is field.
పరిమిత పూర్ణాంక ప్రదేశము ఒక క్షేత్రము అని నిరూపించండి.

OR(లేదా)

b) Let R be a commutative ring with unity and let A be an ideal of R. Then show that R/A is a field $\Leftrightarrow$ A is maximal.
తత్సమము కలిగిన వినిమయ వలయము R మరియు A అనేది R యొక్క ఒక ఆదర్శము. అయితే R/A అనేది ఒక క్షేత్రము $\Leftrightarrow$ A అనేది అధికతమ ఆదర్శము అని చూపండి.

12. a) State and prove First Isomorphism Theorem for Rings.
వలయాలకు మొదటి తుల్యరూపత సిద్ధాంతంను నిర్వచించి, నిరూపించండి.

OR(లేదా)

b) If R is an integral domain, then show that $R[x]$ is an integral domain.
R ఒక పూర్ణాంక ప్రదేశము అయితే $R[x]$ కూడా పూర్ణాంక ప్రదేశము అని చూపండి.

ဢ❖ဢ

Code: 370/ET/BL

FACULTY OF SCIENCE

B.Sc., IV-Semester (Backlog) Examinations, June-2022

Mathematics

(2016, 2017 & 2018 Batches)

Paper-IV

Algebra

Time: 3 hours **Max Marks: 80**

Section-A (Short Answer Questions) 5x4=20M

Note: Answer any **Five** of the following questions in not exceeding 20 lines each.

సూచన: క్రింది వానిలో ఏవేని **ఐదు** ప్రశ్నలకు ఒక్కోదానికి 20 పంక్తులకు మించని జవాబు వ్రాయుము.

1. In a group G, if $a^2 = a$ for all $a \in G$ then prove that G is abelian.
   సమూహము G లో ప్రతి $a^2 = a$ అయితే G ను వినిమయ సమూహము అని నిరూపించండి.

2. If $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ and $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ then find gf, fg, f^2 and g^2.
   $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ మరియు $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ అయితే gf, fg, f^2 మరియు g^2 ను కనుగొనండి.

3. Define left and right cosets of a subgroup H in G.
   G లో ఉపసమూహము H యొక్క ఎడమ మరియు కుడి సహసమితులను నిర్వచించండి.

4. Prove that a subgroup of an abelian group is a normal subgroup.
   వినిమయ సమూహము యొక్క ఉపసమూహము అభిలంబ ఉపసమూహము అని నిరూపించండి.

5. Prove that $R = \left[\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} : a, b \in Z \right]$ is a subring of $M_2(Z)$.
   $R = \left[\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} : a, b \in Z \right]$ ను $M_2(Z)$ యొక్క ఉపవలయము అని నిరూపించండి.

6. Let R/A be a quotient ring. Then probe that R/A has unity element if R has unity element and R/A is commutative if R is commutative.
   వలయము R లో తత్సమము ఉంటే వ్యుత్పన్న వలయము R/A లో తత్సమము మరియు వలయము R వినిమయమైతే R/A వినిమయమని నిరూపించండి.

7. Let $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in Z \right\}$. Show that a mapping $\phi : R \to Z$ defined by $\phi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \ \forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$ is a ring homomorphism.
   $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in Z \right\}$ మరియు ప్రమేయము $\phi : R \to Z$ ను $\phi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \ \forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$ గా నిర్వచిస్తే దానిని వలయ సమరూపత అని చూపండి.

8. Find $(2+3x+x^2)(1+2x+5x^3)$ in $Z[x]$.
   $Z[x]$ లో $(2+3x+x^2)(1+2x+5x^3)$ ను కనుగొనండి.

Section-B (Essay Answer Questions) 4x15=60M

Note: Answer the following questions in not exceeding 4 pages each.
సూచన: క్రింది ప్రశ్నలకు ఒక్కో దానికి 4 పేజీలకు మించని జవాబు వ్రాయుము.

9. a) If G is a group and $a,b,c \in G$, then prove that $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Also solve the equation $a\,x\,b = c$.
సమూహము G లో a,b,c లు మూలకాలు అయితే $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ అని చూపండి మరియు $a\,x\,b = c$ సమీకరణాన్ని x కొరకు సాధించండి.

OR(లేదా)

b) Show that every subgroup of a cyclic group is cyclic.
ఒక చక్రీయ సమూహయు యొక్క ప్రతి ఉపసమామము చక్రీయమని చూపండి.

10. a) State and prove Cayley's theorem.
కెయిలీ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించండి.

OR(లేదా)

b) Prove that a subgroup H of a group G is a normal subgroup $\Leftrightarrow$ every left coset of H in G is a right coset of H in G.
సమూహము G లో ఒక ఉపసమూహము H అభిలంబ ఉపసమూహము కావటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము G లో H యొక్క ప్రతి ఎడమ సహసమితి ఒక కుడి సహసమితి అని నిరూపించండి.

11. a) Prove that a finite integral domain is field.
పరిమిత పూర్ణాంక ప్రదేశము ఒక క్షేత్రము అని నిరూపించండి.

OR(లేదా)

b) Let R be a commutative ring with unity and let A be an ideal of R. Then show that R/A is a field $\Leftrightarrow$ A is maximal.
తత్సమము కలిగిన వినిమయ వలయము R మరియు A అనేది R యొక్క ఒక ఆదర్శము. అయితే R/A అనేది ఒక క్షేత్రము $\Leftrightarrow$ A అనేది అధికతమ ఆదర్శము అని చూపండి.

12. a) State and prove First Isomorphism Theorem for Rings.
వలయాలకు మొదటి తుల్యరూపత సిద్ధాంతంను నిర్వచించి, నిరూపించండి.

OR(లేదా)

b) If R is an integral domain, then show that $R[x]$ is an integral domain.
R ఒక పూర్ణాంక ప్రదేశము అయితే $R[x]$ కూడా పూర్ణాంక ప్రదేశము అని చూపండి.